RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ALGORITMOS

CLASE 18

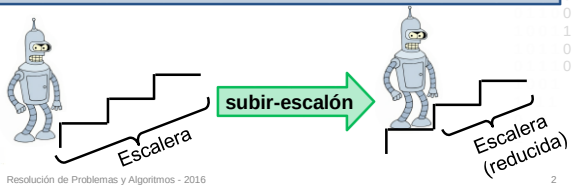
Resolución de problemas utilizando **recursión**

Luciano H. Tamargo
http://cs.uns.edu.ar/~lt
Depto. de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca
2016

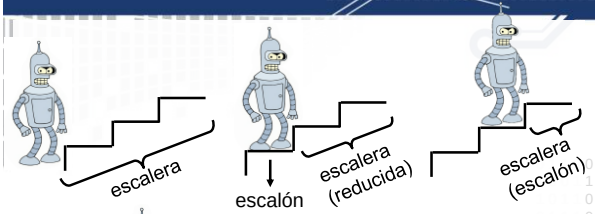
SOLUCIONES RECURSIVAS

- Considere un escenario donde debemos programar un robot para subir una escalera, y se dispone de estas primitivas:
  - **hay-un-solo-escalón:** retorna TRUE o FALSE
  - **hay-más-de-un-escalón:** retorna TRUE o FALSE
  - **subir-escalón:** hace al robot subir un escalón.

Observe el dibujo de la izquierda, donde el robot tiene una escalera por delante, si ejecuto **subir-escalón** el robot tendrá una escalera por delante (reducida en un escalón):



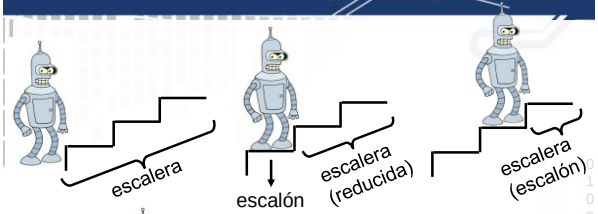
SOLUCIONES RECURSIVAS



Una **escalera** puede verse entonces como: *un único escalón, o un escalón seguido de una **escalera***.

Observación: en las tres situaciones de arriba, el robot siempre tiene una escalera por delante.

SOLUCIONES RECURSIVAS



Algoritmo: subir-una-escalera
Si hay-un-solo-escalón entonces:
- subir-escalón

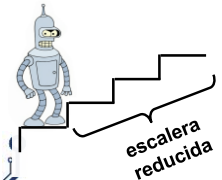
Si hay-más-de-un-escalón entonces:
- subir-escalón
- subir-una-escalera

CONCEPTOS: ALGORITMOS RECURSIVOS

- **Recursión** es la forma en la cual se especifica un proceso **basado en su propia definición**.
- Un **algoritmo** es **recursivo** si se define en términos de sí mismo.
- Un algoritmo no debe entrar en una ejecución infinita, por lo tanto, un algoritmo recursivo **será válido**, si:
  a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
  b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

ALGORITMOS RECURSIVOS

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
  a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
  b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.



Algoritmo: subir-una-escalera
Si hay-un-solo-escalón **entonces:**
- subir-escalón

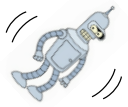
Si hay-más-de-un-escalón **entonces:**
- subir-escalón
- subir-una-escalera

OK

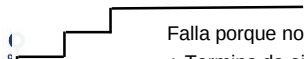
ALGORITMOS RECURSIVOS

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
  a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
  b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

¿Por qué es incorrecto?



Algoritmo 2 subir-escalera
-subir-escalón
-subir-escalera
MAL



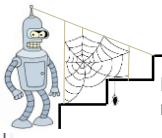
Falla porque no hay indicado un **caso base** (a).
¿ Termina de ejecutarse ?

ALGORITMOS RECURSIVOS

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
  a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
  b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es relativamente más sencilla o reducida** que el caso considerado.

¿Por qué es incorrecto?

Algoritmo 3 subir-la-escalera
Si hay-más-de-un-escalón entonces:
- subir-la-escalera
- subir-escalón
MAL



Falla (b): la referencia a sí mismo NO es relativamente más sencilla o reducida (es igual).
¿Termina de ejecutarse? ¿sube un escalón?

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

La forma de resolver un problema puede plantearse de manera recursiva si se indica:
(a) **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
(b) **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

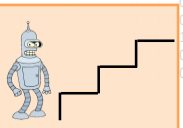
- De esta forma, al utilizar este tipo de planteo, el problema queda dividido en dos sub-problemas:
  a) caso base (también llamado caso trivial) y
  b) caso general (también llamado caso recursivo).
- Para indicar como resolver un problema de manera recursiva en RPA usaremos un planteo recursivo.

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

La forma de resolver un problema puede plantearse de manera recursiva si se indica:
(a) **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y
(b) **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

- **Observación:** Una escalera puede verse como “un único escalón, o un escalón seguido de una escalera”

Planteo recursivo: subir una escalera



Caso base:
si hay un solo escalón, subo el escalón.
Caso general: si hay más de un escalón,
primero subo un escalón,
y luego **subir una escalera** que tiene un escalón menos.

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:
(a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: controlar un conjunto de 1 o más solicitudes de beca para asistir a un evento.

Planteo recursivo: Controlar un conjunto de solicitudes
Caso base:
si hay una sola solicitud, controlar dicha solicitud
Caso general: si hay más de una solicitud
Controlar una solicitud y luego **controlar un conjunto de solicitudes** sin considerar la ya controlada.

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:
(a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

- Generalmente los trabajos de impresión (jobs) son enviados a una cola de impresión (queue) antes de ser impresos.
- Se puede escribir una solución recursiva para el siguiente problema.

Problema propuesto: imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos.

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:
(a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos.

Planteo recursivo: **Imprimir trabajos de la cola de impresión Q**

Caso base:
si hay un único trabajo en Q, enviar a la impresora

Caso general: si hay más de un trabajo en Q,
sacar el primero de Q y enviarlo a la impresora,
y luego **imprimir trabajos de la cola de impresión Q.**

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:
(a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto (¡para el 29!): escribir un planteo para comer un plato de ñoquis (que no está vacio).

Planteo recursivo: **Comer un plato de ñoquis**

Caso base:
si hay un solo ñoqui en el plato,
comer un ñoqui.

Caso general: si hay más de un ñoqui en el plato,
comer un ñoqui y luego **comer un plato de ñoquis.**

CONCEPTO: PLANTEO RECURSIVO

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:
(a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de si mismo, y además,
(b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: (para acompañar los ñoquis) escribir un planteo para tomar un vaso de una bebida de a sorbos (que no está vacio).

Planteo recursivo: **tomar un vaso de bebida**

Caso base:

Caso general:

SOLUCIONES RECURSIVAS EN PASCAL

- Los **procedimientos y funciones** de Pascal nos permitirán **implementar soluciones recursivas**.
- A continuación, para mostrar como hacer funciones y procedimientos recursivos, **vamos a usar ejemplos un poco más simples** que los problemas asociados a programar el comportamiento de robots.
- Como verá en otras materias y en su vida profesional, "recursión" es una **herramienta mucho más general** y poderosa que la "iteración".
- Verá por ejemplo que hay **lenguajes de programación** que **solo tienen recursión**.

METODOLOGÍA PROPUESTA

1. Identificar **ejemplos significativos** que ayuden a entender el problema y su solución.
2. Realizar un **planteo recursivo** en el cual se distinga el "caso base", y el "caso general" (donde se define en términos de si mismo pero para una instancia más simple/reducida/menor).
3. **Verificar que el planteo sea correcto** (con alguno de los ejemplos significativos).
4. Determinar si se realizará una **función** o un **procedimiento recursivo**, e implementarlo en Pascal.
5. Realizar la **traza** de la primitiva en Pascal.

PROBLEMA PROPUESTO: 2^N

- Escribir una función recursiva en Pascal para computar la función 2^N (N no negativo).
- Para N no negativo, la función 2^N puede definirse recursivamente de la siguiente manera:

$$2^N \begin{cases} 2^0 = 1 \quad (\text{si } N=0) \\ 2^N = 2 * 2^{N-1} \quad (\text{si } N>0) \end{cases}$$

Observe que ya está dividido en 2 casos.

Planteo recursivo: **2^N**

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es $2 * 2^{N-1}$

PROBLEMA PROPUESTO: 2^N

```
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para 2 a
la N (que no usa variables auxiliares)}
BEGIN
IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
ELSE
  dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {c. general}
END;
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo: 2^N

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es $2 * 2^{N-1}$


```
PROGRAM Prueba2;{Prueba otra versión de 2 a la N}
VAR exp, r: integer;
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para 2 a
la N (que no usa variables auxiliares)}
BEGIN
IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
ELSE
  dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {c. general}
END;
{El programa valida la entrada y llama a la función recursiva}
BEGIN
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp >= 0;
r:= dosAlaN(exp); writeln('2 a la',exp,'es', r);
END.
```



```
PROGRAM Prueba2;{Prueba otra versión de 2 a la N}
VAR exp, r: integer;
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para 2 a
la N (que no usa variables auxiliares)}
BEGIN
IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
ELSE
  dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {c.
END;
{El programa valida la entrada y llama a la fu
BEGIN
writeln(' Ingrese un exponente >= 0
repeat readln(exp) until exp >= 0;
r:= dosAlaN(exp); writeln('2 a la',exp,'es', r);
END.
```

Realice trazas para exp=0 y exp=3.

¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp?

PROBLEMA PROPUESTO: 2^N

```
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
VAR aux, nuevoN:integer;
BEGIN {función recursiva para 2 a la N}
 IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
 ELSE
  BEGIN  {caso general}
   nuevoN:=N-1;
   aux:= dosAlaN(nuevoN);
   dosAlaN:=2 * aux;
  END;
END;
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo: 2^N

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es $2 * 2^{N-1}$

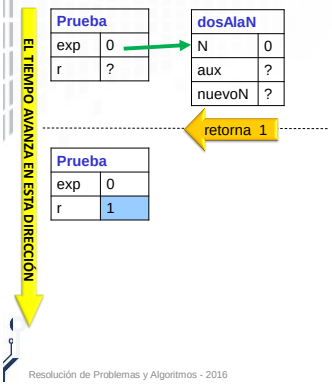

```
PROGRAM Prueba;{Prueba otra versión de 2 a la N}
VAR exp, r: integer;
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
VAR aux, nuevoN:integer;
BEGIN {función recursiva para 2 a la N}
 IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
 ELSE
  BEGIN  {caso general}
   nuevoN:=N-1;
   aux:= dosAlaN(nuevoN);
   dosAlaN:=2 * aux;
  END;
END;
BEGIN
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp >= 0;
r:= dosAlaN(exp); writeln('2 a la',exp,'es', r);
END.
```

```
PROGRAM Prueba;{Prueba otra versión de 2 a la N}
VAR exp, r: integer;
FUNCTION dosAlaN(N:integer):integer;
VAR aux, nuevoN:integer;
BEGIN {función recursiva para 2 a la N}
 IF (N = 0) THEN
  dosAlaN :=1 {caso base}
 ELSE
  BEGIN  {caso general}
   nuevoN:=N-1;
   aux:= dosAlaN(nuevoN);
   dosAlaN:=2 * aux;
  END;
END;
BEGIN
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp >= 0;
r:= dosAlaN(exp); writeln('2 a la',exp,'es', r);
END.
```

Realice trazas para exp=0 y exp=3.

¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp?

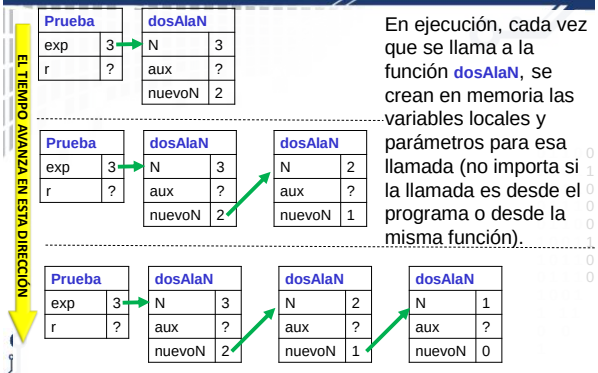
TRAZA INGRESANDO 0



En ejecución, cada vez que se llama a un bloque (programa, función o procedimiento), se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada.

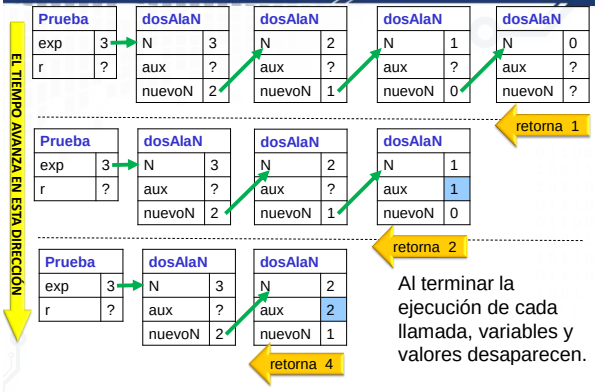
Al terminar la ejecución de una llamada, se eliminan de memoria esas variables locales y sus valores desaparecen

TRAZA INGRESANDO 3 (PRIMERA PARTE)



En ejecución, cada vez que se llama a la función **dosAlaN**, se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada (no importa si la llamada es desde el programa o desde la misma función).

TRAZA INGRESANDO 3 (SEGUNDA PARTE)



Al terminar la ejecución de cada llamada, variables y valores desaparecen.

TRAZA INGRESANDO 3 (ÚLTIMA PARTE)